

$$\begin{aligned} \text{则 } f(x_1) - f(x_2) &= \frac{x_1}{x_1^2+1} - \frac{x_2}{x_2^2+1} = \\ &= \frac{x_1(x_2^2+1) - x_2(x_1^2+1)}{(x_1^2+1)(x_2^2+1)} = \frac{(x_1x_2-1)(x_2-x_1)}{(x_1^2+1)(x_2^2+1)}, \end{aligned}$$

又由 $1 \leq x_1 < x_2$, 得 $x_2 - x_1 > 0, x_1x_2 - 1 > 0$, 则 $f(x_1) - f(x_2) > 0$,

故函数 $f(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上单调递减.

(3) 根据题意 $f(x)$ 为奇函数且 $f(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上单调递减, 则 $f(x)$ 在 $(-\infty, -1]$ 上单调递减.

11. 【解】(1) $\because f(1) = \frac{a-1}{1+b} = 0, \therefore a =$

$$1, f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+b}, \text{ 又 } \because f\left(\frac{1}{x}\right) =$$

$$-f(x), \text{ 即 } \frac{1-x^2}{1+b x^2} = \frac{1-x^2}{x^2+b}, \therefore b = 1,$$

$$\therefore f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1}, \text{ 其定义域为 } \mathbf{R}, \text{ 且}$$

满足 $f(-x) = f(x), \therefore$ 函数 $f(x)$ 为偶函数.

$$(2) \text{ 函数 } f(x) = 1 - \frac{2}{x^2+1} \text{ 在 } (0,$$

$+\infty)$ 上单调递增.

证明: 令 $0 < x_1 < x_2$, 则 $x_1 - x_2 < 0$,

$$\therefore f(x_1) - f(x_2) = \frac{2}{x_2^2+1} - \frac{2}{x_1^2+1} =$$

$$\frac{2(x_1-x_2)(x_1+x_2)}{(x_1^2+1)(x_2^2+1)} < 0, \therefore f(x_1) <$$

$$f(x_2), \therefore f(x) = 1 - \frac{2}{x^2+1} \text{ 在 } (0,$$

$+\infty)$ 上单调递增.

(3) 由 (1) (2) 知偶函数 $f(x) =$

$$1 - \frac{2}{x^2+1} \text{ 在 } (0, +\infty) \text{ 上单调递增,}$$

$$\therefore f(3x-1) > f(x+2) \Leftrightarrow |3x-1| >$$

$$|x+2| \Leftrightarrow 8x^2 - 10x - 3 > 0,$$

$$\text{解得 } x > \frac{3}{2} \text{ 或 } x < -\frac{1}{4}. \therefore \text{ 原不等式}$$

$$\text{的解集为 } \left(-\infty, -\frac{1}{4}\right) \cup \left(\frac{3}{2}, +\infty\right).$$

985 冲刺专题六 函数图象的变换与判断

1. B 【解析】函数 $f(x) = \frac{x-2}{x-1} = \frac{-1}{x-1} +$

1 的图象是由函数 $y = \frac{-1}{x}$ 的图象向右平移一个单位长度再向上平移一个单位长度得到的, 分析四个选项中的图象易得只有 B 中的图象符合要求.

2. B 【解析】函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty), \therefore f(-x) =$

$$(-x)^2 - \frac{1}{|-x|} = x^2 - \frac{1}{|x|} = f(x), \therefore \text{ 函}$$

数 $f(x)$ 为偶函数, 其图象关于 y 轴

对称, 当 $x > 0$ 时, $f(x) = x^2 - \frac{1}{x}$, 单

调递增, 故 B 正确.

3. A 【思路导引】根据函数解析式判断函数图象时, 可通过定义域、单调性、奇偶性、特殊点的函数值等角度进行判断和排除.

【解析】因为函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, 且

$f(-x) = -f(x)$, 所以函数 $f(x)$ 是奇函数, 故 C 错误;

当 $x \in (0, 1)$ 时, $f(x) > 0$, 故 B 错误;

当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $f(x) = \frac{x^2-1}{\sqrt[3]{x}}$, 因

为 x^2-1 的变化速度越来越快, $\sqrt[3]{x}$ 的变化速度越来越慢, 所以 $f(x) =$

$\frac{x^2-1}{\sqrt[3]{x}}$ 的变化速度越来越快, 故 D 错误.

4. B 【解析】由函数 $f(x) =$

$$\frac{d}{ax^2+bx+c} (a, b, c, d \in \mathbf{R}) \text{ 的图象可}$$

得, 1 和 5 是方程 $ax^2+bx+c=0$ 的

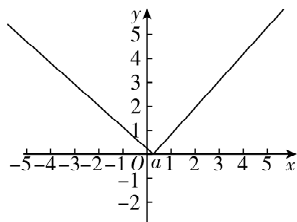
$$\text{两个根, 所以 } \begin{cases} 1+5 = -\frac{b}{a}, \\ 1 \times 5 = \frac{c}{a}, \end{cases} \text{ 即 } ac > 0,$$

且 $ab < 0$, 故 A, C 错误;

又 $f(0) = \frac{d}{c} < 0$, 即 $cd < 0$, 故 D 错误.

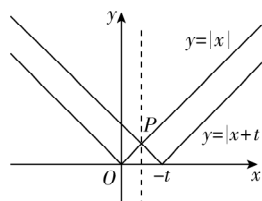
5. 2 【解析】根据题意, 将二次函数 $y = 3(x+1)^2 - 2$ 的图象先向右平移 2 个单位长度, 再向上平移 4 个单位长度, 得到二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的图象, 则有 $ax^2 + bx + c = 3(x+1-2)^2 - 2 + 4 = 3x^2 - 6x + 5$, 必有 $a = 3, b = -6, c = 5$, 故 $a+b+c = 2$.

6. $(-\infty, 1]$ 【解析】 $f(x) = |x-a|$ 的图象由函数 $y = |x|$ 的图象向右平移 a 个单位长度得到, 结合 $f(x) = |x-a|$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增, 可得其大致图象如图所示:



可得实数 a 的取值范围是 $(-\infty, 1]$.

7. -1 【解析】分别画 $y = |x|$ 和 $y = |x+t|$ 的图象, 如图.



根据 $f(x)$ 的图象关于直线 $x = \frac{1}{2}$ 对

称, 可以看出函数 $f(x) = \max\{|x|, |x+t|\}$ 的图象为“V”字形, 从图象

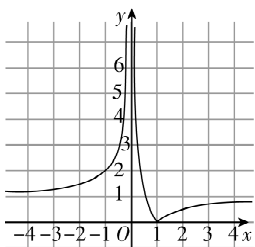
可以看出, $y = |x+t|$ 的图象过点 $(1, 0)$, 即 $|1+t| = 0$, 解得 $t = -1$.

8. 【解】(1) 因为函数 $f(x) = \left|1 - \frac{1}{x}\right|$,

先作出函数 $y = 1 - \frac{1}{x}$ 的图象, 然后

再利用图象变换作出函数 $f(x) =$

$\left|1 - \frac{1}{x}\right|$ 的图象, 如图所示.



(2) 由 $\left|1 - \frac{1}{x}\right| = \frac{1}{3}$, 解得 $x = \frac{3}{2}$ 或 $x = \frac{3}{4}$, 由 $\left|1 - \frac{1}{x}\right| = 3$, 解得 $x = -\frac{1}{2}$ 或 $x = \frac{1}{4}$, 由上图可知, 当 $f(x) = \frac{1}{3}$ 时, $x > 0$, 所以 $[a, b] = \left[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right]$, 所以 $a+b = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1$.

(3) 因为 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, $f(x) \geq 0$, $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上值域为 $[ma, mb]$ ($m > 0$), 所以 $a > 0$. 若 $[a, b]$ 在 $f(x)$ 的单调递增区间内, 又 $f(x) = \left|1 - \frac{1}{x}\right|$ 在 $[1, +\infty)$ 上单调递增, 所以

以 $\begin{cases} f(a) = ma, \\ f(b) = mb, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} 1 - \frac{1}{a} = ma, \\ 1 - \frac{1}{b} = mb, \end{cases}$ 所以 a, b 是方程 $1 - \frac{1}{x} = mx$, 即 $x - 1 = mx^2$ 的两个根.

又 $f(1) = 0$, 所以 $a > 1$, 所以 $mx^2 - x + 1 = 0$ 在区间 $(1, +\infty)$ 上有两个不相等的实数根. 设 $g(x) = mx^2 - x + 1$, 则有

$$\begin{cases} \Delta = 1 - 4m > 0, \\ g(1) = m - 1 + 1 > 0, \\ \frac{1}{2m} > 1, \\ m > 0, \end{cases} \quad \text{解得 } 0 < m < \frac{1}{4},$$

故实数 m 的取值范围为 $\left(0, \frac{1}{4}\right)$.

若 $[a, b]$ 在 $f(x)$ 的单调递减区间内, 则 $[a, b] \subsetneq (0, 1)$,

$$\begin{cases} f(a) = mb, \\ f(b) = ma, \end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{cases} \frac{1}{a} - 1 = mb, \\ \frac{1}{b} - 1 = ma, \end{cases} \quad \text{化简,}$$

得 $1 - a = 1 - b$, 即 $a = b$, 不符合题意. 综上, 实数 m 的取值范围为 $\left(0, \frac{1}{4}\right)$.

第二章 综合检测

1. C 【解析】由题意得 $\begin{cases} 2x-1 \geq 0, \\ x^2 \neq 1, \end{cases}$ 解得 $x \geq \frac{1}{2}$ 且 $x \neq 1$, 故 $f(x)$ 的定义域为 $\left[\frac{1}{2}, 1\right) \cup (1, +\infty)$, 故 C 正确.

2. B 【解析】 $g(x) = \sqrt{x^2} = |x|$, 所以 $f(x) = x, g(x) = \sqrt{x^2}$ 不为同一函数, 故 A 错误;
 $f(x) = x^2, g(x) = \sqrt[3]{x^6}$ 的定义域都为 \mathbf{R} , 且 $g(x) = x^2$, 故 $f(x) = x^2, g(x) = \sqrt[3]{x^6}$ 为同一函数, 故 B 正确;
 $f(x) = x+1$ 的定义域为 \mathbf{R} , 而 $g(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ 的定义域为 $\{x | x \neq 1\}$, 所以 $f(x) = x+1, g(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ 不为同一函数, 故 C 错误;
 $f(x) = x^0$ 的定义域为 $\{x | x \neq 0\}$, 而 $g(x) = 1$ 的定义域为 \mathbf{R} 所以 $f(x) = x^0, g(x) = 1$ 不为同一函数, 故 D 错误.

3. A 【解析】 $f(x)$ 的定义域为 $\{x | x \neq \pm 1\}$, 关于原点对称, 且 $f(-x) = \frac{-x}{|x|-1} = -f(x)$, 故 $f(x)$ 是奇函数, 故 BCD 错误; A 正确.

4. C 【解析】函数 $f(x)$ 的定义域为 $[2, 8]$, 则 $\begin{cases} 2 \leq x-2 \leq 8, \\ x-5 \neq 0, \end{cases}$ 解得 $4 \leq x \leq 10$ 且 $x \neq 5$, 故函数 $y = \frac{f(x-2)}{x-5}$ 的定义域为 $[4, 5) \cup (5, 10]$, 故 C 正确.

5. A 【解析】因为 $f(x)$ 是幂函数, 所以 $m^2 - 2m - 2 = 1$, 解得 $m = -1$ 或 $m = 3$.
当 $m = -1$ 时, $m^2 - m - 3 = -1, f(x) = \frac{1}{x}$ 的图象不经过坐标原点, 符合题意;
当 $m = 3$ 时, $m^2 - m - 3 = 3, f(x) = x^3$ 的图象经过坐标原点, 不符合题意.
综上, $m = -1$ 符合题意, 故 A 正确.

6. A 【解析】因为二次函数 $y = x^2 +$

$(1-a)x + 2$ 的二次项系数为正数, 图象对称轴为直线 $x = -\frac{1-a}{2}$, 且函数在区间 $(-\infty, 4]$ 上单调递减, 所以 $-\frac{1-a}{2} \geq 4$, 解得 $a \geq 9$, 因此, 实数 a 的取值范围是 $[9, +\infty)$, 故 A 正确.

7. D 【解析】因为函数 $f(x)$ 为幂函数, 所以 $3m^2 - m - 1 = 1$, 解得 $m = -\frac{2}{3}$ 或 $m = 1$.

当 $m = -\frac{2}{3}$ 时, 可得 $f(x) = x^{-\frac{5}{3}}$, 此时函数为奇函数, 符合题意;
当 $m = 1$ 时, 可得 $f(x) = x^0$, 此时函数为偶函数, 不符合题意, 舍去. 所以 $m = -\frac{2}{3}$, 故 D 正确.

8. D 【解析】当 $x > 1$ 时, $f(x) = x - 1 > 0$, 又函数 $f(x) = \begin{cases} -2x^2 + ax - 2, & x \leq 1, \\ x - 1, & x > 1 \end{cases}$ 的值域为 \mathbf{R} , 所以以当 $x \leq 1$ 时, $f(x) = -2x^2 + ax - 2$ 的